Anmerkungen*).

Von

Hans Hahn.

§ 2. Der hier angedeutete Weg zur Einführung des Unendlichen (Hinzufügung der Verneinung zum Begriffe des Endlichen) ist nicht der einzig mögliche. Man kann auch, wie dies R. Dedekind tut („Was sind und was sollen die Zahlen?" § 5), den umgekehrten Weg gehen: eine direkte Definition des Unendlichen geben, und das Endliche einführen durch Hinzufügung der Verneinung zum Begriffe des Unendlichen (vgl. die Bemerkung zu § 20). Die Begriffe Menge, Vielheit werden näher besprochen in § 4, der Begriff Größe in § 6.

§ 3. Vgl. Bolzanos Wissenschaftslehre § 82, 83.

§ 4. Vgl. Wissenschaftslehre § 84. Der Begriff der Menge, den B. hier entwickelt, deckt sich im wesentlichen mit dem, der der heutigen Mengenlehre zugrunde liegt (nur daß B.s Definition, dem Sprachgebrauche folgend, verlangt, daß eine Menge mehrere, d. h. mindestens zwei Elemente enthalte, während die Mengenlehre auch von Mengen spricht, die nur ein Element oder gar keines enthalten). Hingegen ist es wichtig, zu beachten, das B. das Wort Teil in ganz anderem Sinne verwendet als die Mengenlehre. B. nennt Teil einer Menge, was man heute Element dieser Menge nennt (z. B. wenn es sich um die Menge aller Einwohner einer Stadt handelt: jeden einzelnen dieser Einwohner), während die Mengenlehre als Teil einer Menge M jede Menge bezeichnet, deren sämtliche Elemente in M vorkommen. Unter diesen Teilen gibt es natürlich auch solche, die nur aus einem

---

*) Diese Anmerkungen beschäftigen sich mit dem Verhältnis von Bolzanos Lehren zu denen der heutigen Mathematik, insbesondere der Mengenlehre. Sie enthalten sich jeder rein philosophischen Kritik. Wer sich mit den Grundbegriffen der Mengenlehre näher bekannt machen will, sei verwiesen auf A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, Berlin 1919. Für ein eingehendes Studium der Mengenlehre empfiehlt sich F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914.

einzigen Elemente a vom M bestehen; doch ist logisch genommen die nur aus dem Elemente a bestehende Menge etwas ganz anderes als dieses Element selbst.

§ 5. Vgl. Wissenschaftslehre § 84. Die hier gegebene Definition des Begriffes Summe ist so abstrakt, und so wenig deutlich, daß es schwer ist, ihren genauen Sinn festzustellen. Es dürfte folgendes gemeint sein: Wir betrachten Gegenstände einer Art Γ; diese Gegenstände können selbst wieder Inbegriffe von Gegenständen der Art Γ sein. Sei z. B. J der Inbegriff der Gegenstände $A, B, C, \ldots$ der Art Γ; dabei sei A der Inbegriff der Gegenstände $A', A'', \ldots$ der Art Γ, B der Inbegriff der Gegenstände $B', B'', \ldots$ der Art Γ usf. Dann können wir neben J auch die Inbegriffe betrachten, die aus J entstehen, indem man einen oder mehrere der Gegenstände $A, B, \ldots$ ersetzt durch ihre „Teile" $A', A'', \ldots$ bzw. $B', B'', \ldots$ usf. Es kann nun gewisse Eigenschaften der Inbegriffe von Gegenständen der Art Γ geben, die stets jedem Inbegriffe J und den auf die genannte Art aus J entstehenden Inbegriffen gleichzeitig zukommen. Betrachtet man die Inbegriffe J nur hinsichtlich einer solchen Eigenschaft, so heißen sie Summen. Ein Beispiel hierfür ist etwa der Wert der Geldstücke: man fasse den Wert einer Mark auf als den Inbegriff der Werte von 100 Pfennigen oder als den Inbegriff der Werte von zehn 10-Pfennigstücken, den Wert eines 10-Pfennigstückes als den Inbegriff der Werte von 10 Pfennigen usf. Hinsichtlich des Wertes ist eine Mark gleich zehn 10-Pfennigstücken, gleich 100 Pfennigen usf. Hingegen hat z. B. die Anzahl der zur Herstellung eines Geldbetrages verwendeten Geldstücke die in Rede stehende Eigenschaft nicht.

Wenn B. sagt: „Denn das eben ist der Begriff einer Summe, daß $A + (B + C) = A + B + C$ sein müsse", so könnte es scheinen, daß er das Gelten des assoziativen Gesetzes als charakteristisch für den Begriff der Summe ansieht. Man wird dem nur insofern zustimmen können, als man gewiß nur dann von Summen sprechen wird, wenn dieses Gesetz gilt. Aber umgekehrt kann das assoziative Gesetz auch in Fällen gelten, wo niemand wird von Summen sprechen wollen: z. B. bei der Multiplikation von Zahlen.

§ 6. Eine Einigung über die Definition des Begriffes Größe hat unter den Mathematikern bisher nicht stattgefunden; dies Wort wird in den verschiedensten Bedeutungen verwendet. Die hier gegebene Definition wird näher erläutert in Wissenschaftslehre § 87. Doch geben die dortigen Ausführungen zu gewissen Bedenken Anlaß. Es wird dort festgesetzt, daß, wenn von den beiden Fällen $M = N + \nu$ und $N = M + \mu$ der erste eintritt, die Größe M die größere sei. Wir nehmen folgendes Beispiel: Wir betrachten jede Elektrizitätsmenge als Inbegriff von (positiven und negativen) Elementarquanten. Die an den Begriff der Summe in § 5 gestellten Forderungen sind dann erfüllt. Da wir die Elektrizitätsmenge 5 darstellen können als Summe von 3 positiven und 2 positiven Elementarquanten, wäre sie größer als die Elektrizitätsmenge 3. Da wir aber andererseits die Elektrizitätsmenge 3 auffassen können als Summe von 5 positiven und 2 negativen Elementarquanten, wäre auch umgekehrt die Elektrizitätsmenge 3 größer als die Elektrizitätsmenge 5. Diese Definition ist also nicht haltbar, solange dem Summenbegriff die Allgemeinheit gelassen wird, die ihm in § 5 gegeben wurde (die aber wieder ihrerseits durchaus dem üblichen Gebrauche des Wortes Summe entspricht).

Tatsächlich scheint B. ein sehr enger Begriff der Größe vorgeschwebt zu haben, da er die Null nicht als Größe anerkennt (vgl. § 14, S. 19). Andererseits spricht er aber ausdrücklich von positiven Größen (§ 18, S. 25, Fußnote), er erkennt also offenbar auch nicht-positive Größen an, so daß es schwer verständlich ist, wie er der Null den Größencharakter absprechen will. Man kann also wohl sagen, daß die Begriffe Summe und Größe durch die §§ 5 und 6 (und die entsprechenden §§ der Wissenschaftslehre) nicht hinlänglich geklärt sind.

§ 7. Vgl. Wissenschaftslehre § 85. Auch gegen die hier gegebene Definition des Begriffes Reihe müssen Bedenken erhoben werden; sie ist offenbar viel weiter, als B. es beabsichtigte. Sei z. B. der gegebene Inbegriff die Menge aller reellen Zahlen; zu jeder reellen Zahl x denken wir uns eine zweite bestimmt durch das Gesetz $x + 1$; B.s Definition des Begriffes Reihe ist ihrem Wortlaute nach erfüllt, obwohl B. die Menge aller reellen Zahlen gewiß nicht als Reihe aufgefaßt wissen wollte. Allem Anscheine nach wollte B. mit seiner Definition das sagen, was wir in der heutigen Terminologie so ausdrücken würden: eine (einfach geordnete) Menge heißt eine Reihe, wenn es zu jedem ihrer Elemente (mit höchstens zwei Ausnahmen: einem ersten und einem letzten Elemente) ein unmittelbar vorhergehendes und ein unmittelbar folgendes Element gibt. Aber auch so gefaßt ist der Begriff noch viel weiter, als offenbar B.

vermeinte. Denn unter diesen Begriff würde z. B. noch die Menge aller ganzen komplexen Zahlen $m+ni$ (m und n ganze Zahlen) fallen, wenn man sie nach folgendem Gesetze ordnet: $m'+n'i > m+ni$ wenn $m' > m$, und falls $m' = m$, wenn $n' > n$.

§ 8. Durch die eben besprochenen Einwände gegen B.s Definition des Begriffes Reihe wird auch die hier gegebene Definition der Begriffe endliche Vielheit und ganze Zahl illusorisch. Doch kann man tatsächlich in der von B. eingeschlagenen Richtung zu einer befriedigenden Darstellung dieser Begriffe gelangen. Vgl. Peanos-Axiome des Begriffes natürliche Zahl (man findet sie ausführlich besprochen bei L. Couturat, Principes des mathèmatiques, Paris 1905, S. 54) und die Ausführungen von B. Russel, The principles of mathematics, Cambridge 1903, S. 128. Verwandt damit ist auch die Einführung dieser Begriffe bei H. Weber, Enzyklopädie der Elementarmathematik, Bd. 1 (3. Aufl., Leipzig 1909) S. 1ff.

§ 12. Die Definition des Unendlichen, die B. in Nr. 1 dieses Paragraphen ablehnt, ist die auch in der heutigen Mathematik durchaus übliche Definition des „uneigentlichen Grenzwertes“ ∞. Man sagt, eine Funktion $f(x)$ habe für $x \to a$ den (uneigentlichen) Grenzwert ∞, in Zeichen: $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, wenn — wie groß eine Zahl A auch vorgegeben werden mag — für alle hinlänglich nahe an a gelegenen (aber von a verschiedenen) Werte von x, immer $f(x) > A$ ist. Was B. hierzu bemerkt, ist durchaus anzuerkennen. Es handelt sich hier in der Tat nicht um die Definition einer unendlichen Größe, sondern nur um ein Wachsen über alle (endlichen) Grenzen hinaus. Man hat daher dieses „unvollendete“, „uneigentliche“ oder „potentielle“ Unendlich von dem „vollendeten“, „eigentlichen“ oder „aktualen“ Unendlich zu unterscheiden. Nur um dies letztere dreht es sich in den Untersuchungen von B.

§ 13. Ähnliche Erwägungen zum Nachweise der „Gegenständlichkeit des Begriffes Unendlich“ (oder wie die heutigen Mathematiker sagen: der Existenz unendlicher Mengen) finden sich auch bei neueren Mathematikern, z. B. R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen? (Braunschweig 1887) § 5. Es verdient daher festgestellt zu werden, daß dieser Gedankengang sich schon bei B. findet.

§ 16. An den beiden Stellen: „sofern man unter der unendlich großen Größe ...“ und „unter der unendlich kleinen

Größe ..." sollte es wohl statt „der" heißen: „einer", da es ja sehr wohl verschiedene unendlich große und unendlich kleine Größen geben kann. Wenn B. weiter feststellt, eine unendliche Größe könne nicht als Zahl betrachtet werden, so liegt das durchaus an der sehr engen Definition des Begriffes Zahl, von der er ausgeht (§ 8), indem er das Wort „Zahl" nur in dem Sinne verwendet, in dem man heute sagt „natürliche Zahl". Demzufolge bezeichnet denn auch B. die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ..., die irrationalen „Ausdrücke" $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, ... nicht als Zahlen, sondern lediglich als Größen, während man sie heute allgemein als rationale bzw. irrationale Zahlen bezeichnet. Und so treten denn auch in G. Cantors Mengenlehre unendliche (transfinite) Zahlen auf. Was dagegen von philosophischer Seite eingewendet wurde, läuft auf einen bloßen Wortstreit hinaus: es handelt sich dabei ja nur darum, einen wie weiten Sinn man dem Worte „Zahl" beilegen will.

§ 18. Was hier über Summen von unendlich vielen Größen gesagt ist, insbesondere die in Fußnote*) durchgeführte Rechnung, entspricht nicht den heutigen Ansichten über diesen Gegenstand. B. glaubt sich wohl auf Grund des in § 5 eingeführten Summenbegriffes berechtigt, ohne weiteres eine Summe aus unendlich vielen Summanden zu betrachten. Wir haben schon gesehen, daß diese Definition des Begriffes Summe zu unbestimmt ist, um mit ihr etwas anfangen zu können. Man wird also gegen B.s Beweisführung einzuwenden haben, daß mit den in ihr auftretenden Summen gar kein präziser Begriff verbunden ist, und daß die mit ihnen vorgenommenen Rechnungen (wie z. B. Ausklammern eines gemeinsamen Faktors) durch nichts begründet sind.

Die heutige Mathematik stützt sich, um den Begriff einer Summe aus unendlich vielen (reellen oder komplexen) Zahlen einzuführen, auf den Begriff des Grenzwertes einer Zahlenfolge, dessen genaue Definition die folgende ist*). Man sagt: die Zahlenfolge $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ hat die Zahl b zur Grenze, oder: sie hat den Grenzwert b, in Zeichen $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$, wenn — wie klein die positive Zahl ε auch gegeben sein mag — alle Zahlen der Folge, mit höchstens endlich vielen Ausnahmen, der Un-

*) Näheres hierüber in allen besseren Lehrbüchern der Differentialrechnung oder z. B. A. Pringsheim, Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre, 1. Bd., S. 160.

gleichung genügen $|b_n - b| < \varepsilon$ (d. h. sich von b um weniger als ε unterscheiden). Eine gegebene Zahlenfolge kann einen Grenzwert besitzen, doch muß dies nicht sein. Besitzt sie einen Grenzwert, so heißt sie konvergent, besitzt sie keinen, so heißt sie divergent. — Um nun den Begriff einer Summe aus unendlich vielen Zahlen (oder, wie statt dessen gewöhnlich gesagt wird: die Summe einer unendlichen Reihe) zu definieren*), geht man aus vom Begriffe der Summe zweier Zahlen. Durch vollständige Induktion definiert man zunächst den Begriff der Summe aus n Zahlen $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, indem man annimmt, es sei schon bekannt, was unter einer Summe aus $n - 1$ Zahlen $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$ zu verstehen sei, und dann festsetzt: ist s_{n-1} der Wert der Summe $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$, so sei der Wert s_n der Summe $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ gegeben durch:

$$s_n = s_{n-1} + a_n.$$

Und nun wird der Begriff „Summe der unendlichen Reihe $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$“ in folgender Weise definiert. Man bilde aus ihr die Folge ihrer „Teilsummen“:

$$s_1 = a_1,\; s_2 = a_1 + a_2,\; s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots,\; s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots.$$

Ist diese Zahlenfolge konvergent, und ist s ihr Grenzwert:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s,$$

so definieren wir s als die Summe unserer unendlichen Reihe:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = s.$$

Ist hingegen die Folge der Teilsummen divergent, so soll von einer Summe unserer unendlichen Reihe nicht gesprochen, und das Symbol $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ als sinnlos betrachtet werden. Also kurz gesprochen: Summe der unendlich vielen Summanden (Summe der unendlichen Reihe) $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ ist Grenzwert ihrer Teilsummen, falls es einen solchen Grenzwert gibt.

Auf Grund dieser Definition ist es nun auch leicht, die im Texte behandelte Gleichung:

$$a + ae + ae^2 + \ldots + ae^n + \ldots = \frac{a}{1 - e} \qquad (|e| < 1)$$

zu beweisen. Die n-te Teilsumme ist hier:

$$s_n = a + ae + \ldots + ae^{n-1},$$

*) Vgl. z. B. A. Pringsheim a. a. O. S. 93.

und wenn $e \neq 1$, ist dies nach einer elementaren Formel:

$$s_n = a \frac{1 - e^n}{1 - e}.$$

Wenn nun*) $|e| < 1$, so hat die Folge $e, e^2, e^3, \ldots, e^n, \ldots$ den Grenzwert 0:

$$\lim_{n=\infty} e^n = 0 \qquad (|e| < 1).$$

Daher hat die Folge $s_1, s_2, \ldots, s_n \ldots$ den Grenzwert $a \cdot \frac{1}{1-e}$, d. h. es ist

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \frac{a}{1-e},$$

und unsere Behauptung ist bewiesen.

§ 19. Die Frage, wann zwei Mengen als „in Hinsicht auf ihre Vielheit einander gleich" zu betrachten seien, bildet einen der wundesten Punkte in B.s Lehre vom Unendlichen. Sie findet sich in § 21 und § 24 dahin beantwortet**), daß zwei Mengen als gleich zu betrachten seien, wenn sie „gleiche Bestimmungsgründe haben". Diese Definition ist viel zu unbestimmt, als daß sich mit ihr irgend etwas anfangen ließe. Nach § 6 nun hätte die Menge N größer zu heißen als die Menge M, wenn N Summe aus einer M „gleichen" Menge und noch einer Menge μ ist. Da aber der Begriff „gleich" nicht hinlänglich präzise gefaßt ist, gilt dies auch vom Begriffe „größer", wenigstens immer dann, wenn von den beiden Mengen M und N keine Teil der anderen ist. Doch kann man zweifellos sagen, daß nach der Auffassungsweise B.s jede Menge größer ist als jede ihrer echten***) Teilmengen. Vgl. hierzu die Bemerkungen zu § 21.

§ 20. Ist jedes Ding einer Menge M mit einem Dinge der Menge N zu einem Paare verbunden, so daß in beiden Mengen kein einziges Ding ohne Verbindung zu einem Paare bleibt, und auch kein einziges in mehr als einem Paare vorkommt, so sagt man,

*) B. schreibt statt dessen $e < 1$, weil er stillschweigend nur an positive e denkt.

**) Diese beiden Stellen stimmen untereinander nicht überein. In § 21 heißt es: „wie etwa, daß beide Mengen ganz gleiche Bestimmungsgründe haben," in § 24 hingewiesen: „dies wird mit Sicherheit erst dann gefolgert werden können, wenn beide Mengen gleiche Bestimmungsgründe haben".

***) Da man heute zu den Teilmengen einer Menge M auch diese Menge selbst rechnet, bezeichnet man die Teilmengen im engeren Sinne (die nicht alle Elemente von M enthalten) auch als echte Teilmengen.

die beiden Mengen seien eineindeutig (oder umkehrbar eindeutig) aufeinander bezogen. Zwei Mengen, die eineindeutig aufeinander bezogen werden können, heißen nach G. Cantor äquivalent oder gleichmächtig. Was B. hier nachweist, kann also kurz so ausgesprochen werden: Eine unendliche Menge kann äquivalent einer ihrer echten Teilmengen sein. Dies trifft sogar, wie man unschwer zeigt, und wie auch B. zu Beginn dieses Paragraphen sagt, für jede unendliche Menge zu. Und da es für endliche Mengen gewiß niemals zutrifft, so kann diese Eigenschaft geradezu zur Definition der unendlichen Mengen verwendet werden. Dies ist der Weg, den Dedekind eingeschlagen hat (Bemerkung zu § 2).

§ 21. Bleibt es B.s Verdienst, sich als erster mit der Äquivalenz unendlicher Mengen beschäftigt zu haben, so war es G. Cantor vorbehalten, die volle Tragweite dieses Begriffes zu erkennen. B. begnügt sich hier mit der rein negativen Feststellung, Äquivalenz sei kein Kriterium für die Gleichheit zweier Mengen „in Hinsicht auf die Vielheit ihrer Teile“, eine Behauptung, deren Bedeutung noch dadurch beeinträchtigt wird, daß — wie wir zu § 19 bemerkten — nicht klar gesagt wird, was unter einer solchen Gleichheit zu verstehen sei. Im Gegensatze hierzu hat G. Cantor gerade auf den Begriff der Äquivalenz seine Lehre von den Mächtigkeiten (oder Kardinalzahlen) der Mengen aufgebaut, die sich als so außerordentlich fruchtbar erwiesen hat.

Wenn wir von zwei endlichen Mengen sagen, sie enthalten dieselbe Anzahl von Elementen, oder — was dasselbe heißt — sie haben gleiche Kardinalzahl, so meinen wir damit offenbar nichts anderes als: die beiden Mengen sind äquivalent. So sagen wir z. B., die Anzahl der Finger der rechten Hand sei die gleiche, wie die Anzahl der Finger der linken Hand, weil eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Fingern der rechten und denen der linken Hand möglich ist. Die Kardinalzahl einer endlichen Menge ist daher nichts anderes als dasjenige Merkmal, das diese Menge mit allen ihr äquivalenten Mengen gemein hat, und wodurch sie sich von allen übrigen, ihr nicht äquivalenten Mengen unterscheidet. „Eine Menge hat die Kardinalzahl 5“ heißt genau dasselbe wie: „diese Menge ist äquivalent der Menge der Finger einer Hand.“

In diese Definition des Begriffes Kardinalzahl geht nun aber die Endlichkeit der betrachteten Menge gar nicht ein. Sie kann wörtlich auch auf unendliche Mengen angewendet werden und liefert so zu jeder Menge ein Merkmal, das — wenn es sich um endliche Mengen handelt — sich auf den bekannten Begriff der Anzahl oder Kardinalzahl dieser Menge reduziert, und daher zweckmäßig ganz allgemein als die Kardinalzahl der betrachteten Menge bezeichnet werden kann*). Obwohl diese Bezeichnung heute in der Mengenlehre allgemein angenommen ist, wollen wir hier — um allen Wortstreitigkeiten aus dem Wege zu gehen — diesen Begriff lieber mit dem von G. Cantor herrührenden und auch heute noch durchaus üblichen Worte Mächtigkeit bezeichnen. Die Definition dieses Begriffes lautet also: „Mächtigkeit einer Menge ist dasjenige ihrer Merkmale, das sie mit allen ihr äquivalenten Mengen gemein hat, und wodurch sie sich von allen ihr nicht äquivalenten Mengen unterscheidet." Äquivalente Mengen haben also dieselbe Mächtigkeit, nicht-äquivalente Mengen haben verschiedene Mächtigkeiten.

Durch die Beispiele von § 20 nun zeigt B., daß eine unendliche Menge gleiche Mächtigkeit wie eine ihrer echten Teilmengen haben kann. Noch überraschendere Beispiele hierfür hat G. Cantor gefunden: z. B. daß die Menge aller rationalen Brüche gleiche Mächtigkeit hat, wie die Menge aller natürlichen Zahlen**), daß die Menge aller Punkte einer Ebene***), und ebenso die Menge aller Punkte des Raumes†) gleiche Mächtigkeit hat, wie die Menge aller Punkte einer Geraden usf.

Daß zwei Mengen, von denen eine die andere als echte Teilmenge enthält und somit nach B.s Terminologie größer ist als die andere hinsichtlich der Vielheit ihrer Teile, doch gleiche Mächtigkeit haben können, bedeutet natürlich keinerlei Widerspruch, ebensowenig wie etwa die Tatsache, daß zwei Menschen, von denen der eine größer ist als der andere, doch gleiches Gewicht haben können. Insbesondere ist darin auch kein Widerspruch enthalten gegen das „Axiom": das Ganze ist größer als der Teil.

Nachdem wir festgestellt haben, wann zwei Mengen gleiche Mächtigkeit haben, bleibt noch festzustellen, was unter der Aussage verstanden werden soll: die Menge M hat größere Mäch-

*) Alles, was von philosophischer Seite hiergegen eingewendet wurde, beruht wohl auf Mißverständnissen.

**) Vgl. A. Fraenkel, Einl. i. d. Mengenlehre, S. 20.

***) Vgl. A. Fraenkel a. a. O. S. 72.

†) Vgl. A. Fraenkel a. a. O. S. 78.

tigkeit als die Menge N. Die Definition lautet: Ist die Menge N äquivalent einem Teile von M, aber nicht äquivalent mit M selbst, dann hat M größere Mächtigkeit als N. G. Cantor hat bewiesen, daß die Menge aller reellen Zahlen größere Mächtigkeit hat als die Menge aller natürlichen Zahlen*), ferner daß die Menge aller Teilmengen der Menge M stets größere Mächtigkeit**) hat als die Menge M selbst***).

Der Nachweis, daß die Mächtigkeiten der Mengen ihrer Größe nach geordnet werden können (d. h. daß von je zwei Mächtigkeiten, die nicht gleich sind, die eine größer als die andere ist), erforderte schwierige Untersuchungen. Er wurde erbracht durch G. Cantors Theorie der wohlgeordneten Mengen, auf die wir hier nicht eingehen können†).

§ 22. Bei dem hier geschilderten Verfahren zur Ermittlung der Anzahl einer endlichen Menge durch Numerieren ihrer Elemente fehlt der Nachweis, daß die ermittelte Anzahl unabhängig ist von der Reihenfolge, in der die Elemente numeriert werden. Der erste, der die Notwendigkeit eines solchen Nachweises erkannte, scheint E. Schröder gewesen zu sein††). Ausführlich findet man diesen Beweis bei A. Pringsheim, Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre, 1. Bd, S. 15. Vgl. auch meine kritischen Bemerkungon hierzu: Göttingische gelehrte Anzeigen, 1919, S. 328.

§ 27. Der Ableugnung unendlich großer und unendlich kleiner Zeitlängen, Entfernungen, Kräfte ist durchaus zuzustimmen: wo in den Anwendungen der Mathematik (insbesondere auf Physik) von unendlich kleinen Größen dieser Art die Rede ist, handelt es sich stets um eine abgekürzte Ausdrucksweise; die in den Überlegungen wirklich auftretenden Größen müssen sämtlich endlich sein. Der Beweis aber, durch den B. diese Ableugnung begründet, ist gewiß nicht überzeugend; so glaubt B. u. a. nachweisen zu können (S. 39, Z. 2 v. u.), „daß aus der Angabe der beiden Zeitpunkte α und β, aus der Angabe der sämtlichen Kräfte, welche die geschaffenen Substanzen in dem Zeitpunkte α gehabt,

*) Vgl. A. Fraenkel a. a. O. S. 35.

**) Vgl. A. Fraenkel a. a. O. S. 48.

***) Soll dies auch für Mengen gelten, die nur aus einem oder zwei Elementen bestehen, so muß man zu den Teilen von M auch M selbst und die „leere Menge“ (die gar kein Element enthält) rechnen.

†) Vgl. A. Fraenkel a. a. O. S. 124 ff.

††) Vgl. H. v. Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen, Bd. 3, S. 358.

aus der Angabe der Orte, wo eine jede sich befunden" alle Folgezustände ableitbar seien, was doch ganz bestimmt nicht der Fall ist, da hierzu zum mindesten auch die Angabe der Geschwindigkeiten im Zeitpunkte α erforderlich ist.

Wie neuere Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie gezeigt haben, beruht die Unmöglichkeit unendlich großer und unendlich kleiner Strecken in der Geometrie auf einem eigenen Axiome, dem sog. Axiome des Archimedes*), das aus den übrigen Axiomen ebensowenig ableitbar ist wie das euklidische Parallelenaxiom. Ebenso wie man unter Verneinung des Parallelenaxioms eine nichteuklidische Geometrie aufbauen kann, in der das Parallelenaxiom keine Gültigkeit hat, ebenso kann man unter Verneinung des archimedischen Axioms eine nichtarchimedische Geometrie aufbauen, in der es (nach Wahl einer Einheitsstrecke) unendlich große und unendlich kleine Strecken gibt**). Wenn vorhin von der Unmöglichkeit unendlich großer und unendlich kleiner Strecken die Rede war, so ist demnach damit nicht eine logische Unmöglichkeit gemeint, vielmehr ist damit gemeint, daß sich im Raume unserer Anschauung und Erfahrung solche Strecken nicht finden.

Nicht nur in der Mengenlehre, sondern auch in der Lehre von den nichtarchimedischen Geometrien betrachtet die Mathematik unendliche Größen. Doch sind es Größen ganz verschiedener Art, die in diesen beiden Disziplinen behandelt werden***). Daß man dies zunächst übersah, hat viel Verwirrung mit sich gebracht. Auch bei B. sind diese gänzlich verschiedenen Arten unendlicher Größen nicht auseinandergehalten.

§ 28. Die Definition: „etwas berechnen wollen, heißt eine Bestimmung desselben durch Zahlen versuchen" ist wohl — wenn man das Wort Zahl in so engem Sinne versteht, wie das B. tut (§ 8) — viel zu eng. Mit Cantors Mächtigkeiten (endlichen und

*) Es lautet: sind a und b zwei Strecken, so gibt es stets ein Vielfaches na der ersten, das größer als die zweite ist: $na > b$. — Man findet hierüber einiges bei F. Enriques, Fragen der Elementargeometrie, 1. Teil (Leipzig 1911), S. 135 ff.

**) Als erster hat dies wohl G. Veronese durchgeführt in seinen Fondamenti di geometria, 1891. Ein sehr einfaches Beispiel einer nichtarchimedischen Geometrie hat D. Hilbert angegeben: Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1899, S. 24.

***) In der Mengenlehre handelt es sich um Verallgemeinerungen des Kardinalzahl- und Ordinalzahlbegriffes, in den nichtarchimedischen Geometrien um Strecken.

transfiniten Kardinalzahlen)*) ist, wie in der Mengenlehre gezeigt wird, sehr wohl eine Rechnung möglich:

Seien $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ zwei Mächtigkeiten. Um die Summe $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}$ zu definieren, gehen wir aus von einer Menge M der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ und einer Menge N der Mächtigkeit $\mathfrak{n}$, die mit M kein Element gemein habe. Wir bilden die „Vereinigungsmenge" von M und N, die aus sämtlichen Elementen von M und sämtlichen Elementen von N besteht, und definieren: $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}$ ist die Mächtigkeit dieser Vereinigungsmenge. — Um das Produkt $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$ zu definieren, gehen wir wieder aus von einer Menge M der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ und einer Menge N der Mächtigkeit $\mathfrak{n}$. Wir bilden alle möglichen Paare (a, b), deren erstes Glied a zu M, deren zweites Glied b zu N gehört. Die Menge aller dieser Paare bezeichnen wir als die „Verbindungsmenge" von M mit N und definieren: $\mathfrak{m}\mathfrak{n}$ ist die Mächtigkeit dieser Verbindungsmenge. — Um die Potenz $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$ zu definieren, ordnen wir jedem Elemente von N ein Element von M zu (wobei sehr wohl auch verschiedenen Elementen von N dasselbe Element von M zugeordnet werden darf), und nennen eine solche Zuordnung auch eine Belegung von N mit Elementen von M. Die Menge aller solchen Belegungen nennen wir die „Belegungsmenge" von N mit M und definieren: $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$ ist die Mächtigkeit dieser Belegungsmenge.

Diese Definitionen von Summe, Produkt und Potenz können mit Recht als Erweiterungen aufs Unendliche der für natürliche Zahlen geläufigen Definitionen angesehen werden. Denn sind M und N endliche Mengen, so ergeben unsere Definitionen tatsächlich die bekannten Werte von Summe, Produkt, Potenz zweier natürlicher Zahlen. Auch die für natürliche Zahlen bekannten Rechnungsregeln, sofern sie sich durch Gleichungen ausdrücken (assoziatives, kommutatives, distributives Gesetz), bleiben für beliebige Mächtigkeiten bestehen, nicht aber die durch Ungleichungen ausgedrückten. Daher rührt es auch, daß die inversen Operationen (Subtraktion, Division) auf unendliche Mächtigkeiten nicht übertragen werden können.

Der hier skizzierte Kalkül mit Mächtigkeiten hat sich als sehr fruchtbar erwiesen. Um nur ein Beispiel zu geben: bedeutet

*) Ähnliches gilt auch für Cantors Ordnungstypen, die in demselben Sinne eine Ausdehnung des Begriffes „Ordinalzahl" auf unendliche Mengen liefern, wie dies die Mächtigkeiten für den Begriff „Kardinalzahl" leisten (vgl. A. Fraenkel, Einl. i. d. Mengenlehre, S. 78ff).

$\mathfrak{a}$ die Mächtigkeit der Menge aller natürlichen Zahlen, $\mathfrak{c}$ die Mächtigkeit der Menge aller reellen Zahlen, so besteht, wie G. Cantor gezeigt hat, die Beziehung*) $\mathfrak{c} = 2^{\mathfrak{a}}$. Daraus folgt durch Rechnung:

$$\mathfrak{c}^2 = 2^{\mathfrak{a}} \cdot 2^{\mathfrak{a}} = 2^{\mathfrak{a}+\mathfrak{a}} = 2^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}.$$

Die so errechnete Gleichung $\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{c}$ drückt die (in der Bemerkung zu § 21 erwähnte) Tatsache aus, daß die Menge aller Punkte einer Geraden und die Menge aller Punkte einer Ebene gleiche Mächtigkeit haben.

§ 29. Die Erörterungen dieses Paragraphen sind vielen Einwendungen ausgesetzt. Im Sinne der Mengenlehre haben die mit $\overset{0}{N}, \overset{n}{N}, \overset{0}{S}$ bezeichneten Mengen alle dieselbe Mächtigkeit, denn sie sind alle äquivalent der Menge der natürlichen Zahlen, haben also gleiche Mächtigkeit wie diese (in Cantors Terminologie: sie sind sämtlich abzählbar-unendlich).

Was unter $a\overset{0}{N}$ (S. 45, Z. 9 v. u.) zu verstehen wäre, ist nicht ersichtlich. Auch woher B. die Berechtigung nimmt, die Gleichung:

$$\text{Mult.}\,(8 - 7) = \text{Mult.}\,(13 - 12)$$

anzusetzen, ist — nach dem zu § 19 Gesagten — nicht zu sehen.

§ 30. Die Einführung Unendlich-kleiner als Reziprokwerte Unendlich-großer hängt völlig in der Luft, solange nicht eine Division Unendlich-großer definiert ist, was nicht der Fall ist. Die angedeutete Einführung Unendlich-kleiner durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung könnte sich möglicherweise als fruchtbar erweisen.

§ 31. Die hier von B. geübte Kritik ist ganz im Sinne der heutigen Mathematik.

§ 32. B.s These, die unendliche Reihe $a - a + a - a + \ldots$ sei ein „gegenstandsloser Größenausdruck" würden wir (vgl. die Bemerkungen zu § 18) heute so ausdrücken: diese Reihe ist (wenn $a \neq 0$) divergent, und dies wäre in folgender Weise zu begründen: Die Folge ihrer Teilsummen ist:

$$a,\ a - a = 0,\ a - a + a = a,\ a - a + a - a = 0,\ \ldots$$

d. h. es ist die Folge $a, 0, a, 0, \ldots$. Diese Folge besitzt keinen Grenzwert, d. h. sie ist divergent.

---

*) Vgl. A. Fraenkel a. a. O. S. 77.

Die von B aufgestellte Forderung, die Summe einer unendlichen Reihe dürfe keine Veränderung in ihrem Werte erfahren, welche Veränderung wir auch in der Aufeinanderfolge ihrer Glieder vornehmen mögen, wird durch die in unseren Bemerkungen zu § 18 gegebene und heute allgemein übliche Definition nicht erfüllt. So kann man z. B. aus der Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ (deren Summe $= lg\ 2$ ist)*) durch bloßes Umordnen der Glieder eine Reihe erhalten, deren Summe eine beliebig vorgegebene reelle Zahl ist**), und dasselbe trifft für alle Reihen $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ aus reellen Zahlen zu, die selbst konvergieren, während die Reihe aus den absoluten Beträgen $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$ divergiert***).

§ 33. Vgl. die Bemerkungen zu § 29.

§ 34. Zur Unmöglichkeit der Division durch 0 sei folgendes bemerkt. Die Division wird definiert als Umkehrung der Multiplikation: A durch B dividieren, heißt eine Zahl x aus der Gleichung $B \cdot x = A$ bestimmen. Ist nun $B = 0$ und $A \neq 0$, so hat diese Gleichung keine Lösung; ist $B = 0$ und $A = 0$, so ist durch diese Gleichung keine Zahl x bestimmt, weil ihr jede Zahl genügt. In diesem Sinne gibt es also niemals eine Division durch 0, ein Quotient $\frac{A}{0}$ ist eine sinnlose Zeichenkombination. Man wird also, im Gegensatze zu B., auch eine „identische" Gleichung $\frac{A}{0} = \frac{A}{0}$ nicht zuzulassen haben, da ihre beiden Seiten sinnlos sind.

§ 35. Das hier Gesagte deckt sich völlig mit den Ansichten der heutigen Mathematik. Zur näheren Erläuterung des über das Messen Gesagten diene folgendes: Es sei uns ein System (positiver) Größen gegeben, die addiert werden können (z. B. die Strecken der Geometrie). Es ist dann klar, was unter einem Vielfachen $p \cdot N$ der Größe N (p bedeutet eine natürliche Zahl), sowie unter dem Teile $\frac{1}{q} N$ (wo q eine natürliche Zahl bedeutet) zu verstehen ist. Damit ist auch gegeben, was $\frac{p}{q} N$ bedeutet: es ist das p-fache des q-ten Teiles von N.

Ist M eine zweite Größe des Systemes, und $M = \frac{p}{q} N$, so sagen

*) Vgl. A. Pringsheim, Vorl. über Zahlen- u. Funktionenlehre, 1. Bd., S. 415.

**) Vgl. A. Pringsheim a. a. O. S. 429ff.

***) Vgl. A. Pringsheim a. a. O. S. 401ff.

wir: M steht in rationalem Verhältnisse zu N. Doch kann es sehr wohl Größen M geben, die zu N nicht in rationalem Verhältnisse stehen. Sei M eine solche. Gibt es dann ein Vielfaches $n \cdot M$ das $> M$ ist*), so können die ganzen Zahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_q, \ldots$ so bestimmt werden, daß:

$$(*) \qquad p_1 \cdot N < M < (p_1 + 1) \cdot N; \quad \frac{p_2}{2} \cdot N < M < \frac{p_2 + 1}{2} \cdot N;$$
$$\frac{p_3}{3} \cdot N < M < \left(\frac{p_3 + 1}{3}\right) \cdot N, \ldots, \quad \frac{p_q}{q} \cdot N < M < \left(\frac{p_q + 1}{q}\right) \cdot N, \ldots$$

Gilt das Axiom des Archimedes für unser Größensystem, so kann es darin nur eine einzige Größe M geben, die allen diesen Ungleichungen genügt; denn angenommen, es gäbe noch eine zweite M', und es wäre etwa**) $M' > M$, so müßte sein:

$$M' - M < N;$$
$$M' - M < \frac{1}{2} N, \quad M' - M < \frac{1}{3} N, \ldots, \quad M' - M < \frac{1}{q} N, \ldots$$

es wären also sämtliche Vielfache $q\,(M' - M) < N$, entgegen dem Axiome des Archimedes. Gilt hingegen das Axiom des Archimedes nicht, so kann es sehr wohl außer M noch eine zweite Größe M' geben, die sämtlichen Ungleichungen (*) genügt. Im ersten Falle ist also durch Angabe der Ungleichungen (*) die Größe M völlig bestimmt, im zweiten nicht. Die übliche Art des Messens der Größe M durch eine Einheit N besteht nun aber, wenn nicht gerade M zu N in rationalem Verhältnis steht, eben in der Angabe der Ungleichungen (*); sie beruht also durchaus auf dem Axiome des Archimedes.

§ 36. Auch den Ausführungen dieses Paragraphen ist durchaus zuzustimmen. Wenn auch in den heutigen Lehrbüchern der Differentialrechnung vielfach von der „Ermittlung des wahren Wertes" eines Bruches $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$ gesprochen wird, der für $x = a$ „in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheint", so handelt es sich dabei tatsächlich — ganz wie dies B. auseinandersetzt — lediglich um

*) Dies ist sicher der Fall, wenn für unser Größensystem das Axiom des Archimedes gilt (vgl. die Bemerkung zu § 27), anderenfalls muß es nicht der Fall sein.

**) Wäre $M' < M$, so ist im folgenden $M' - M$ durch $M - M'$ zu ersetzen.

Ermittlung des Grenzwertes, dem dieser Bruch zustrebt, wenn x sich unbeschränkt dem Werte a nähert (vorausgesetzt, daß ein solcher Grenzwert überhaupt vorhanden ist).

§ 37. Die hier vorgetragene Begründung der Differentialrechnung deckt sich völlig mit der heute üblichen. Nur ist zu bemerken, daß die in der Fußnote von S. 65 aufgestellte Behauptung, jede Funktion (gemeint ist natürlich: jede stetige Funktion) besitze, von Ausnahmepunkten abgesehen, eine Abgeleitete, sich als irrig erwiesen hat*), um so mehr noch die Behauptung, jede Funktion lasse sich nach der Formel von S. 68, Z. 7 v. u., entwickeln**). Mit der (S. 69 erwähnten) Theorie der Rektifikation, Komplanation, Kubierung hat sich B. in einer eigenen, 1817 erschienenen Schrift befaßt: „Die drey Probleme der Rectification, der Complanation und der Cubierung, ohne Betrachtung des unendlich Kleinen, ohne die Annahme des Archimedes, und ohne irgendeine nicht streng erweisliche Voraussetzung gelöst.“ Die „Annahmen“ oder „Grundsätze“ des Archimedes, von denen hier die Rede ist, sind die folgenden***):

I. Jede krumme Linie ist länger als die gerade, die zwischen denselben Endpunkten liegt.

II. Von zwei krummen Linien, die beide nach einer Seite zu hohl sind, ist die umschließende länger als die umschlossene.

III. Wenn eine krumme und eine ebene Fläche dieselben Grenzen haben, so ist die erstere größer als die letztere.

IV. Von zwei krummen Flächen, die beide nach einer Seite zu hohl sind, ist die umschließende größer als die umschlossene.

§ 38. Die S. 73 gegebene Definition eines Kontinuums wurde von G. Cantor als zu weit beanstandet†): in der Tat können nach dieser Definition auch zwei räumlich vollständig getrennte Mengen (z. B. zwei Kugeln ohne gemeinsamen Punkt) ein Kontinuum bilden††). Wegen der Definition des Begriffes „Kontinuum“ verweisen wir auf G. Cantor, Math. Ann. 21, S. 572.

Auch B.s Definition des isolierten Punktes ist viel weiter als die heute allgemein angenommene, der zufolge ein Punkt einer

*) Vgl. z. B. L. Bieberbach, Differentialrechnung, Leipzig 1917, S. 104.

**) Dies ist die sog. Formel von Taylor. Vgl. z. B. H. v. Mangoldt, Einführung in die höhere Mathematik, Bd. 2 (Leipzig 1912), S. 93.

***) S. IV der eben zitierten Schrift von B.

†) Math. Ann. 21, S. 576.

††) Dies war B. bekannt, vgl. § 48, S. 94, Z. 7 v. o.

Punktmenge isoliert heißt, wenn es eine Umgebung von ihm gibt, in der kein zweiter Punkt der Menge liegt. Daß sich übrigens B. wohl bewußt war, wie weit seine Definition sei, zeigt § 41, Abschnitt 3.

Wenn es auf S. 74 heißt: „Denn bedeutet ∞ eine unendliche Menge, so sind auch $\frac{\infty}{2}, \frac{\infty}{4}, \frac{\infty}{8}, \ldots$ unendliche Mengen. So liegt es in dem Begriffe des Unendlichen", so ist dazu zu sagen, daß die Begriffe $\frac{\infty}{2}, \frac{\infty}{4}$ usw. nirgends definiert wurden, und man daher nicht weiß, was darunter zu verstehen ist.

§ 40. Die in der Fußnote von S. 80 gegebene Definition der Dimensionszahl ist — wenn sie auch nicht als endgültig anerkannt werden kann — insofern sehr bemerkenswert, als sie zeigt, wie weit B. in seinen exakten Begriffsbildungen vorgeschritten war.

Das Problem der „Größe eines Raumdinges" ist nichts anderes als das seither wiederholt von verschiedenen Mathematikern behandelte Problem des Inhaltes einer Punktmenge; wir verweisen auf H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen (Berlin, 1920), Kap. VI, § 8.

§ 41. Abschnitt 1 enthält die für viele feinere Untersuchungen der Funktionenlehre wichtige Unterscheidung der Intervalle in abgeschlossene, offene und halboffene.

Das in Abschnitt 4—7 Gesagte entbehrt einer festen Grundlage, da nirgends festgestellt wurde, wann zwei Mengen als gleich anzusehen sind. Vgl. die Bemerkung zu § 19.

§ 42. Vgl. die Bemerkungen zu § 20, 21.

§ 43. Was B. über $tg\left(\frac{\pi}{2} \pm n\pi\right)$ sagt, ist durchaus zutreffend. Für Winkel der Form $\frac{\pi}{2} \pm n\pi$ sind Tangens und Sekans nicht definiert, „gegenstandslos". Hingegen wird man vom Standpunkte der heutigen Analysis nicht zuzugeben haben, daß Sinus und Tangens der Winkel 0 oder $\pm n\pi$ irgendeine Sonderstellung einnehmen.

§ 46. Die Gleichung S. 89, Z. 13 v. o. ergibt sich durch Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes auf das rechtwinklige Dreieck apm, in dem $ap = pn$ und $am = pr$ ist. Die Gleichung

S. 89, Z. 4 v. u. ergibt sich so: Es ist $mr = pr - pm$. Hierin ist pr der Kreisradius a, und für pm erhält man aus dem rechtwinkligen Dreiecke apm, indem man $ap = dx$ setzt:

$$pm = \sqrt{a^2 - dx^2}.$$

Also ist:

$$mr = a - \sqrt{a^2 - dx^2} = a\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{dx}{a}\right)^2}\right).$$

Indem man hierin die Wurzel nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt, erhält man die gewünschte Gleichung*).

Wir würden heute zu dem Galileischen „Paradoxon" folgendes sagen. Die Gleichung:

$$\pi \cdot pn^2 = \pi \cdot pr^2 - \pi \cdot pm^2$$

drückt aus, daß der Kreis vom Halbmesser $ap = pn$ gleichen Flächeninhalt hat wie der Ring zwischen den Kreisen der Halbmesser pr und pm. Lassen wir ap gegen o konvergieren, so zieht sich der Kreis vom Halbmesser ap auf den Punkt a zusammen, der Kreisring auf die Peripherie des Kreises vom Halbmesser pr. Dieser Grenzübergang lehrt also lediglich, daß diese beiden Punktmengen (die eine bestehend aus dem Punkte a, die andere aus der Kreisperipherie) gleichen Flächeninhalt haben. Das aber ist weder falsch noch paradox, sondern es ist trivial, denn sie haben beide den Flächeninhalt o. Der Anschein eines Paradoxons kommt nur zustande durch die irrige Auffassung, als sei der Inhalt einer Punktmenge ein Maß für die Vielheit der in ihr enthaltenen Punkte.

§ 47. Die gemeine Zykloide ist die Kurve, die ein Punkt eines Kreises beschreibt, der auf einer Geraden (der „Basis") rollt ohne zu gleiten. Aus dieser Definition folgt unmittelbar die auf S. 92, Z. 16 v. o., angegebene Konstruktion des Punktes m der Zykloide, denn es muß der auf der Geraden zurückgelegte Weg ao gleich dem aufgerollten Bogen om des erzeugenden Kreises sein.

Die Behauptung, daß das Maß des Winkels moa der halbe Bogen om ist (S. 92, Z. 13 v. u.), beweist man so: man führe den Mittelpunkt q des erzeugenden Kreises ein, dem der Bogen om

*) Vgl. H. v. Mangoldt, Einführung i. d. höhere Mathematik, Bd. 2, S. 122.

angehört. Das Dreieck *oqm* ist gleichschenklig. Es ergänzt also der halbe Winkel *oqm* den Winkel *moq* zu einem rechten. Ebenso aber ergänzt der Winkel *moa* den Winkel *moq* zu einem rechten. Also ist der Winkel *moa* gleich dem halben Winkel *oqm*. Das aber ist die Behauptung.

§ 48. Der Beweis (Fußnote von S. 95), daß die Gerade die kürzeste Verbindung zweier Punkte liefert, kann nicht als bindend anerkannt werden, da er die Existenz einer solchen kürzesten Verbindung voraussetzt, die keineswegs selbstverständlich ist, sondern erst bewiesen werden müßte*). Ferner gründet sich B.s Beweis auf den Begriff der Ähnlichkeit Man muß aber einen vom Begriffe der Ähnlichkeit unabhängigen Beweis fordern, da die Ähnlichkeitslehre auf dem Parallelenaxiome beruht, unser Satz aber von diesem Axiome unabhängig ist, und somit auch in nichteuklidischen Geometrien gilt, in denen die Ähnlichkeitslehre keine Gültigkeit hat. Am besten gründet man wohl den Beweis auf den Satz, daß in jedem Dreiecke die Summe zweier Seiten größer als die dritte ist, was unschwer ohne Parallelenaxiom bewiesen wird.

Die Behauptung S. 97, daß ein Körper, dessen Punkte zu je zweien einen Abstand $\leqq E$ haben, ganz in einer Kugel vom Durchmesser E liege, beruht auf einem Versehen, wie etwa ein gleichseitiges Dreieck von der Seite E zeigt. Es muß Halbmesser statt Durchmesser heißen.

Die logarithmische Spirale ist die Kurve, deren Gleichung in Polarkoordinaten lautet $\log r = a \cdot \varphi$. Als natürliche Spirale (S. 99, Z. 9 v. u.) wird insbesondere die folgende bezeichnet: $\log r = \varphi$, wo mit $\log$ der natürliche Logarithmus bezeichnet ist. Für die Länge des „von dem Radius $= 1$ dem Mittelpunkte zueilenden Zweiges" ergibt sich nach einer Formel der Integralrechnung**):

$$\int_0^1 \sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}\, dr = \int_0^1 \sqrt{2}\, dr = \sqrt{2}.$$

Die Kurve $yx^2 = a^3$ wird als Hyperbel höherer Art bezeichnet, weil ihre Gleichung ähnlich ist der Gleichung $yx = c$

*) B. verfällt hier in den von ihm selbst in § 62 gerügten Irrtum.

**) Vgl. z. B. H. v. Mangoldt, Einführung in die höhere Mathematik. Bd. 3 (Leipzig 1914), S. 172.

einer (gleichseitigen) Hyperpel. Für den Flächeninhalt desjenigen Teiles der Fläche, „der von $x = a$ zu allen höheren Werten von x gehört", ergibt sich nach einer bekannten Formel der Integralrechnung*):

$$\int_a^\infty y\,dx = \int_a^\infty \frac{a^3}{x^2}\,dx = a^2.$$

Die Gleichung S. 100, Z. 6 v. o., ergibt sich nach derselben Formel**):

$$\int_{a-\sqrt{2}}^{a} y\,dx = \int_{a-\sqrt{2}}^{a} \frac{a^3}{x^2}\,dx = a^3\left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{a-\sqrt{2}}\right) = \frac{a^3}{a-\sqrt{2}} - a^2.$$

§ 49. Die Entwicklungen dieses Paragraphen kranken an dem schon wiederholt zur Sprache gebrachten Übelstande, daß ihnen keine präzise Definition der Begriffe „gleich" und „größer" bei unendlichen Vielheiten zugrunde liegt. Im Sinne der Mengenlehre hat wohl die Menge aller Punkte einer Strecke größere Mächtigkeit als die in 1.) konstruierte Punktmenge***) (wiewohl die von B. vorgebrachte Argumentation keineswegs ausreicht, um dies zu begründen). Hingegen hat die Menge aller Punkte einer Strecke die gleiche Mächtigkeit, ob man ihre Endpunkte hinzurechnet oder nicht. Sie hat ferner gleiche Mächtigkeit wie die Menge aller Punkte einer (beiderseits unendlichen) Geraden†), ja sogar wie die Menge aller Punkte einer Ebene oder des ganzen Raumes (vgl. die Bemerkung zu § 21, 28).

§ 70. Die Art, wie B. die erste der beiden vorgebrachten Paradoxien behandelt, ist wohl nicht völlig befriedigend. Man kann sie besser als eines der zahlreichen uns heute bekannten Beispiele eines unerlaubten Grenzüberganges auffassen. Hingegen st B.s Aufklärung der zweiten Paradoxie durchaus zutreffend. Die Fallzeit auf der Sehne erhält man durch folgende Überlegung: die Beschleunigung auf einer um den Winkel α gegen die Hori-

*) Vgl. z. B. H. v. Mangoldt, a. a. O. S. 20.

**) Bei B. steht irrtümlich das negative Vorzeichen.

***) V.l. Bemerkung zu § 21.

†) Vgl. A. Fraenkel, Einl. i. d. Mengenlehre, S. 38.

zontale geneigten schiefen Ebene ist $g \cdot \sin \alpha$, der Zusammenhang zwischen Weg s und Fallzeit t daher:

$$s = \frac{g \cdot \sin \alpha \cdot t^2}{2}.$$

Der Weg s aber ist die zum Zentriwinkel 2α gehörige Sehne des Kreises vom Radius r, also:

$$s = 2r \cdot \sin \alpha.$$

Daraus folgt:

$$t = 2 \cdot \sqrt{\frac{r}{g}},$$

nicht wie B. schreibt $\sqrt{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$.